7,5 mb für die Intensität der Höhenstrahlung einen Wert von $I_0 = 0{,}68$ Teilchen/cm^2 sec sterad. Dieser Wert ist als Mittelwert für die Jahre 1954 – 1956 anzusehen. (Der Meteorit Breitscheid fiel am 11. August 1956 [26].) GOEBEL und SCHMIDLIN [27] errechneten aus der Tritiumaktivität des Meteoriten Breitscheid ein $I_0 = 0{,}78$ Nukleonen/cm^2 sec sterad bzw. 0,58 Teilchen/cm^2 sec sterad. Die Unterscheidung zwischen Nukleonen und Teilchen erscheint uns jedoch bei einem so kleinen Meteoriten wie Breitscheid nicht zulässig, da nur wenige zusammengesetzte Teilchen aufsplittern werden. Das Aufsplittern der zusammengesetzten Teilchen könnte höchstens in großen Meteoriten eine kleine Rolle spielen; doch erleiden Teilchen mit höherer Kernladungszahl beim Durchgang durch kompakte Materie sehr große Energieverluste durch Ionisation, so daß nur ein Teil dieser Teilchen Spallationsprozesse auslösen wird.

Wir hoffen, in naher Zukunft noch in einigen weiteren frischgefallenen Meteoriten Natrium 22 zu messen, um dann zusammen mit einem langlebigen Kern Aussagen über eine zeitliche Abhängigkeit der Intensität der Höhenstrahlung machen zu können. Auf jeden Fall konnte mit dieser Arbeit gezeigt werden, daß Natrium 22 in Steinmeteoriten mit hinreichender Genauigkeit gemessen werden kann, wenn eine Probe von ca. 50 g zur Verfügung steht und der Fall des Meteoriten nicht weiter als etwa eine Halbwertszeit von Natrium 22 (2,6 Jahre) zurückliegt.

Fräulein U. SCHEERER danken wir herzlich für ihre Mithilfe an dieser Arbeit.

Die Arbeit wurde unterstützt durch Sachbeihilfe des Bundesministeriums für Atomkernenergie und Wasserwirtschaft.

[26] F. A. PANETH, Geochim. Cosmochim. Acta **17**, 315 [1959].
[27] K. GOEBEL u. P. SCHMIDLIN, Z. Naturforschg. **15 a**, 79 [1960].

NOTIZEN

Bemerkungen über die adiabatische Invarianz des Bahnmomentes geladener Teilchen

Von G. BACKUS

Department of Applied Mathematics, M. I. T., Cambridge, Mass., U.S.A.

A. LENARD und R. KULSRUD

Project Matterhorn, Princeton University, Princeton, New Jersey, U.S.A.

(Z. Naturforschg. **15 a**, 1007—1009 [1960]; eingegangen am 1. August 1960)

In der Arbeit von HERTWECK und SCHLÜTER [1] ist eine Methode vorgeschlagen, die relativen Änderungen des Bahnmomentes eines geladenen Teilchens in einem sich zeitlich langsam ändernden homogenen Magnetfeld approximierend zu berechnen. Die Grundidee der Methode ist die Linearisierung einer Differentialgleichung, die die Zeitabhängigkeit einer sehr kleinen Größe beschreibt [2]. Nun scheint diese Näherung zwar gerechtfertigt zu sein, solange es sich um Größen von der Ordnung der Änderungsgeschwindigkeit des Feldes handelt, doch ist dies hier keineswegs der Fall, denn die gesamte Änderung der fraglichen Größe in einer Zeitspanne, in der das Feld überhaupt variiert, ist klein von einer Größenordnung, die höher als eine beliebige Potenz der Feldänderungsgeschwindigkeit ist. Es tritt ein eigentümliches Wegheben ein, und man interessiert sich für das sehr kleine Residuum, das noch übrig bleibt. Daher ist es durchaus möglich, daß das quadratische Glied der fraglichen Differentialgleichung einen Beitrag zu diesem Residuum gibt, der nicht klein ist im Vergleich zu dem Beitrag, den man durch die Linearisierung der Gleichung erhält.

Da man also die Formel von HERTWECK und SCHLÜTER wohl anzweifeln kann, scheint es uns von Interesse zu sein, daß es *eine Klasse von Feldänderungen gibt, für welche die Bewegungsgleichungen exakt integrierbar sind.* Wir wollen die aufgeworfene Frage an Hand dieses Beispiels diskutieren.

Es handelt sich um die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} + i\,h\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{2}\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\,r = 0\,, \tag{1}$$

wo $r = x + i\,y$ die komplexe Ortskoordinate und $h = h(t)$ die Gyrofrequenz des Teilchens im Magnetfeld ist. Durch die Transformation

$$r = z \exp\left\{-\frac{i}{2}\int_0^t h\,\mathrm{d}t\right\} \tag{2}$$

erhält man für z

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{h^2}{4}\,z = 0\,. \tag{3}$$

Wir wählen für die Größe h eine Zeitabhängigkeit, definiert durch

$$h^2 = h_0^{\,2}(1-u) + h_1^{\,2}\,u - (\eta^2 + \alpha^2)\,u\,(1-u)\,, \tag{4}$$

[1] F. HERTWECK u. A. SCHLÜTER, Z. Naturforschg. **12 a**, 844 [1957].

[2] Vgl. Anm. [1], Gl. (9).

Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung") beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

wo die Variable $u=(1+e^{-\alpha t})^{-1}$ ist, und die übrigen Größen konstant sind. Drei von ihnen, h_0, h_1 und α, sollen reell sein und können offenbar positiv angenommen werden; bezüglich der vierten Konstante η machen wir nur die Voraussetzung, daß η^2 reell sei und der Ungleichung

$$\eta^2+\alpha^2<(h_0+h_1)^2 \tag{5}$$

genüge, was eine notwendige und hinreichende Bedingung für $h^2>0$ im Intervall $0\leq u\leq 1$ (d. h. $-\infty\leq t\leq+\infty$) ist.

Die so aufgestellte Aufgabe ist exakt lösbar [3, 4]. Man rechnet unschwer nach, daß eine Lösung der Gl. (3) die Funktion $z=\Phi(u)$ ist, die durch

$$\Phi(u)=u^{i h_0/2\alpha}(1-u)^{i h_1/2\alpha} \tag{6}$$
$$\cdot F\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\frac{h_0+h_1+\eta}{\alpha},\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\frac{h_0+h_1-\eta}{\alpha};1+\frac{i h_0}{\alpha};u\right)$$

definiert ist, wo F, wie üblich, die Gausssche hypergeometrische Reihe bedeutet. Eine zweite unabhängige Lösung ist etwa durch die komplex konjugierte der soeben angegebenen zu erhalten. Im Limes $t\to-\infty$ verhält sich Φ offenbar wie

$$\Phi\sim e^{i h_0 t/2}\qquad(t\to-\infty). \tag{7}$$

Um das Verhalten im gegengesetzten Grenzfall $t\to+\infty$ zu finden, muß man die analytische Fortsetzung der Gaussschen Reihe F zufügen [5]. Dies gibt

$$\Phi\sim Q\,e^{i h_1 t/2}+P\,e^{-i h_1 t/2}\qquad(t\to-\infty), \tag{8}$$

wo

$$Q=\frac{\Gamma(1+i h_0/\alpha)\,\Gamma(i h_1/\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\frac{h_0+h_1+\eta}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\frac{h_0+h_1-\eta}{\alpha}\right)} \tag{9}$$

und P von Q ausgeht, wenn man h_1 durch $-h_1$ ersetzt und die übrigen Konstanten unverändert läßt. Das asymptotische Verhalten der Lösung ist vollständig charakterisiert durch die Konstanten Q und P; jedoch sind die letzteren auch im Fall einer allgemeinen Zeitabhängigkeit von h nicht unabhängig. Es besteht vielmehr die Relation

$$h_1\{|Q|^2-|P|^2\}=h_0, \tag{10}$$

deren Ursache die Konstanz der Wronskischen Determinante zweier unabhängigen Lösungen von (3) ist.

Die allgemeine Lösung von (1) ist nun gegeben, wenn wir in (2) eine willkürliche Linearkombination von Φ und Φ^* mit komplexen Koeffizienten für z einsetzen. Wir schreiben asymptotisch

$$\begin{aligned} r&\sim a_0+\varrho_0\,e^{-i h_0 t}\qquad(t\to-\infty),\\ r&\sim a_1+\varrho_1\,e^{-i h_1 t}\qquad(t\to+\infty), \end{aligned} \tag{11}$$

wodurch vier komplexe Konstanten a_0, ϱ_0, a_1, ϱ_1 definiert sind. Natürlich sind nur zwei willkürlich wählbar; die anderen zwei ergeben sich mit Hilfe der Gl. (8) als lineare Funktionen der ersteren. Man bestätigt unmittelbar, daß die Relationen

$$\begin{aligned} a_1&=(Q\,a_0+P^*\,\varrho_0)\exp\left\{\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\,t\,\mathrm{d}t\right\},\\ \varrho_1&=(P\,a_0+Q^*\,\varrho_0)\exp\left\{\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\,t\,\mathrm{d}t\right\} \end{aligned} \tag{12}$$

lauten. Die uns interessierende Größe ist das magnetische Moment $\mu=|\mathrm{d}r/\mathrm{d}t|^2/h$. Das Verhältnis ihrer asymptotischen Werte ist mittels (11) und (12) zu berechnen; es ergibt sich

$$\frac{\mu_1}{\mu_0}=\frac{h_1|\varrho_1|^2}{h_0|\varrho_0|^2}=\frac{h_1}{h_0}\{|Q|^2+2\,\Re(Q\,P\,\varepsilon)+|P\,\varepsilon|^2\}, \tag{13}$$

wo $\varepsilon=a_0/\varrho_0$ eine komplexe Konstante ist, die nur von den Anfangsbedingungen abhängt. Wenn man noch die Gl. (10) berücksichtigt, ergibt eine Mittelung über die Anfangsphase

$$\frac{\langle\mu_1\rangle}{\mu_0}=1+\frac{h_1}{h_0}(1+|\varepsilon|^2)\,|P|^2. \tag{14}$$

Nun kann man $|Q|^2$ und $|P|^2$ aus (9) berechnen mittels einiger Eigenschaften der Γ-Funktion

$$\Gamma(z)\,\Gamma(-z)=-\pi/z\sin(\pi z),$$
$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+z)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}-z)=\pi/\cos(\pi z).$$

Es ergibt sich

$$|Q|^2=\frac{h_0}{2h_1}\left\{\frac{\cosh\frac{\pi h_0}{\alpha}\cosh\frac{\pi h_1}{\alpha}+\cosh\frac{\pi\eta}{\alpha}}{\sinh\frac{\pi h_0}{\alpha}\sinh\frac{\pi h_1}{\alpha}}+1\right\}, \tag{15}$$

wovon $|P|^2$ mit der oben schon angedeuteten Substitution abzuleiten ist. Offenbar ist (10) erfüllt. Bemerken wir noch, daß unsere Gl. (15) sowohl für reelle als auch rein imaginäre Werte von η besteht; doch kann sie natürlich keine „analytische" Konsequenz von (9) sein, da sie falsch ist für allgemein komplexe Werte von η (die jedoch in diesem Problem keine Rolle spielen). Die Formel (15) wurde schon von Eckart [3] und Epstein [4] abgeleitet, da sie in den von ihnen behandelten Problemen die Rolle eines Transmissionskoeffizienten spielt.

Im Grenzfall $\alpha\to\infty$ (was einer sprunghaften Änderung in h entspricht) wird

$$\frac{h_1}{h_0}|P|^2=\frac{(h_0-h_1)^2}{4\,h_0\,h_1}. \tag{16}$$

Diese Formel ist auch leicht direkt zu bestätigen. Im entgegengesetzten Falle adiabatischer Änderungen in h (d. h. $\alpha\to 0$) wird natürlich

$$\lim_{\alpha\to 0}\mu_1/\mu_0=1 \tag{17}$$

[3] C. Eckart, Phys. Rev. **35**, 1303 [1930].
[4] P. S. Epstein, Proc. Nat. Acad. Sci. **16**, 627 [1930].
[5] Bequem ist die Formel, die in Whittaker and Watson, „Modern Analysis" (Cambridge 1927), par. 14.53 abgeleitet ist.

(„adiabatische Invarianz von μ"). Eine genauere Abschätzung erhält man mit der folgenden Formel, die aus (16) direkt ableitbar ist

$$\frac{h_1}{h_0}|P|^2 \sim \exp\left\{-\frac{\pi}{\alpha}\operatorname{Min}(2h_0, 2h_1, h_0+h_1-\eta)\right\} \quad (\alpha \to 0). \tag{19}$$

Wenn η rein imaginär ist, muß man $h_0+h_1-\eta$ einfach ignorieren, und wenn es unter $2h_0$, $2h_1$, $h_0+h_1-\eta$ zwei oder drei gleiche gibt, muß man die rechte Seite von (19) mit 2 oder 3 multiplizieren.

Nun ist es bemerkenswert, daß das von HERTWECK und SCHLÜTER explizit behandelte Beispiel[6] gerade in der oben definierten Klasse enthalten ist. Sodann kann man auch ihre Approximationsformel mit dem asymptotischen Resultat (15) vergleichen. Es ergibt sich

$$\frac{h_1}{h_0}|P|^2 \sim 2\,e^{-2\pi h_0/\alpha} \quad (\alpha \to 0), \tag{20}$$

während die Formel von HERTWECK und SCHLÜTER

$$\frac{\pi^2}{4}\,e^{-2\pi h_0/\alpha} \tag{21}$$

liefert. Das heißt: Die Approximation stellt (in diesem Falle) den Exponenten des exponentialen Abfalls richtig dar, aber nicht den Koeffizienten. *Daher kann sie einen Fehler ergeben, der von derselben Ordnung ist wie die zu berechnende Größe.* Wir haben verifiziert, daß dieser Schluß nicht nur für das von SCHLÜTER und HERTWECK behandelte Beispiel, sondern auch für die ganze Klasse (4) gilt.

Unserer Meinung nach ist also das Problem, das asymptotische Verhalten von $\langle\mu_1\rangle/\mu_0$ im Limes adiabatischer Feldänderungen allgemein richtig zu erfassen, noch ungelöst, und eine schöne, doch wahrscheinlich sehr schwierige mathematische Aufgabe.

[6] Vgl. Anm. [1], Gl. (19).

Elektrische Gasaufzehrung durch Anregung metastabiler Zustände

Von R. JAECKEL und E. TELOY

Physikalisches Institut der Universität Bonn

(Z. Naturforschg. **15 a**, 1009—1010 [1960]; eingegangen am 9. August 1960)

Die Erscheinung der elektrischen Gasaufzehrung ist bisher nicht in allen Einzelheiten geklärt. Es ist z. B. vermutet worden, daß neben der Ionisation und Dissoziation von Gasmolekülen auch die Anregung metastabiler Zustände eine Ursache für Gasaufzehrung sein könnte. LUKIRSKY und PTIZYN[1] und WAGENER[2] haben eine bevorzugte Adsorption von metastabilem Stickstoff an frisch aufgedampften Magnesium- bzw. Barium-Gettern beobachtet. BLOOMER und HAINE[3] nehmen an, daß auch in ausgeheizten Systemen ohne besondere Getter Anregung metastabiler Zustände zur Aufzehrung beiträgt. Andere Autoren, z. B. ALPERT[4], halten diesen Beitrag dagegen für sehr klein oder null.

Zur Klärung dieser Frage haben wir die Gasaufzehrung an einer unselbständigen Entladung bei kleinen Spannungen, die teilweise unterhalb der Ionisierungsspannung lagen, gemessen. Abb. 1 zeigt die Versuchsanordnung. Das Vakuumgefäß besteht im wesentlichen aus Glas (Schott 1447). Nach dem Abpumpen und Ausheizen (10^{-7} Torr; 450 °C) wird das Kugelschliffventil und damit die Verbindung zur Diffusionspumpe geschlossen und durch ein Ventil nach ALPERT[4] Gas (meist N_2) bis zu einem Druck von etwa 10^{-4} Torr eingelassen. Den Druck mißt ein Ionisations-Manometer. In der „Elektronenstoß-Röhre" treten Elektronen aus einer Glühkathode aus, werden zur Anode hin beschleunigt und durchfliegen schließlich einen nahezu feldfreien Raum, in dem sie mit den Gasmolekülen zusammenstoßen und diese anregen bzw. ionisieren können (Stoßraum). Wenn dabei Gasaufzehrung eintritt, so kann deren Sauggeschwindigkeit in einem Differenz-Verfahren gemessen werden: Die Anodenspannung der Elektronenstoß-Röhre wird in gleichmäßigen Zeitabständen von einigen Minuten abwechselnd ein- und ausgeschaltet und aus der Druck-Zeit-Kurve die Sauggeschwindigkeits-Änderung beim Umschalten bestimmt.

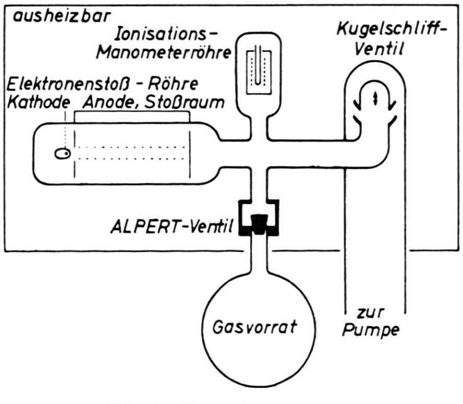

Abb. 1. Versuchsanordnung.

Die aufgezehrten Gasmengen sind in den meisten Fällen sehr gering. Um sie dennoch gut messen zu können, wurde 1. die Elektronenstoß-Röhre so konstruiert, daß sie auch bei geringen Spannungen einen relativ hohen Elektronenstrom durch einen langen Stoßraum fließen läßt, also relativ viele Stöße ermöglicht (die maximale Perveanz ist etwa $3 \cdot 10^{-5}$ $AV^{-3/2}$); 2. das

[1] P. I. LUKIRSKY u. S. W. PTIZYN, Z. Phys. **71**, 339 [1931].
[2] S. WAGENER, Br. J. Appl. Phys. **2**, 132 [1951].
[3] R. N. BLOOMER u. M. E. HAINE, Vacuum **3**, 128 [1953].
[4] D. ALPERT, Handb. der Physik, Bd. 12, Springer-Verlag, Berlin 1958.